Славин И.В. (Пенза)

Сильная эллиптичность в гибридной формулировке скалярной задачи дифракции

1. Введение

При анализе сходимости методов Галеркина чаще всего главную роль играет свойство сильной эллиптичности оператора A [1], а именно:

Определение 1 *Линейный ограниченный оператор $A: H \to H'$ называется сильно эллиптическим, если существует компактный оператор $K: H \to H'$ такой, что*

$$\mathcal{R}e\langle (A+K)\varphi, \varphi\rangle \geq \gamma_0 ||\varphi||^2, \quad \forall\, \varphi \in H \tag{1}$$

для некоторого $\gamma_0 > 0$.

Для сильно эллиптического оператора A метод Галеркина сходится [2]. В этом случае базисные функции в методе Галеркина можно выбирать любыми, лишь бы они удовлетворяли свойству аппроксимации [2]. Это обстоятельство в гибридных методах позволяет выбирать базисные функции на поверхности и в объемной области независимо друг от друга ("согласование" поверхностных и объемных базисных функций является одной из основных трудностей в гибридных методах).

Из вышесказанного следует, что необходимо стремиться к таким постановкам электродинамических или акустических задач, в которых оператор A будет сильно эллиптическим. Тогда вопрос о сходимости метода Галеркина будет сводиться к выбору базисных функций, обладающих свойством аппроксимации.

Рассматривается скалярная (акустическая) задача дифракции стороннего поля на системе тел T. Тела предполагаются либо "абсолютно мягкими" (и тогда на поверхности этих тел ставятся краевые условия 1-го рода), либо "абсолютно жесткими" (и тогда на поверхности ставятся краевые условия 2-го рода).

Предлагается использовать гибридную формулировку задачи с представлением поля во внешней области с помощью функции Грина. Фиктивная поверхность S выбирается таким образом, чтобы было возможно построить функцию Грина во внешности S. Поэтому в работе выбрана сфера, хотя все результаты (о сильной эллиптичности задачи) остаются в силе и для произвольной кусочно-гладкой поверхности S.

Основная цель - доказать, что такой подход приводит к сильно эллиптическому оператору, отвечающему гибридной формулировке краевой задачи. Можно показать, что использование обычных потенциалов простого и двойного слоя (аналогично [3]) на поверхности S без использования функции Грина дает оператор задачи, не являющийся эллиптическим.

2. Постановка задачи.

Пусть $T \subset R^3$ - система ограниченных непересекающихся тел с кусочно-гладкими (замкнутыми) граничными поверхностями ∂T. Пусть также Γ и Γ' - замкнутые части ∂T такие, что $\Gamma \subset \partial T$, $\Gamma' \subset \partial T$, $\Gamma \cup \Gamma' = \partial T$. Выберем сферу $S := \{x : |x| = R\}$, содержащую T, так, чтобы $S \cap \bar{T} = \emptyset$. Обозначим внешность S через V_+, а внутреннюю часть S без $\bar{T}$ - через V_-; $R^3 = V_+ \cup V_- \cup S \cup \bar{T}$.

Пусть в области V_+ задано падающее поле $u_0(x)$, $x \in V_+$. Требуется определить полное поле $u(x)$, которое имеет вид:

$$u(x) = \begin{cases} u_+(x) + u_0(x), & x \in V_+, \\ u_-(x), & x \in V_-. \end{cases} \tag{2}$$

В силу представления (2) все условия в V_- будут только однородными.

Параметры среды в V_- описываются функциями $k(x)$ и $\varepsilon(x)$, которые предполагаются кусочно-непрерывными. В области V_+ k_0 и ε_0 - вещественные положительные константы. Поверхности разрыва $k(x)$ и $\varepsilon(x)$ - кусочно-гладкие и обозначены через ω.

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\Delta u + k^2(x) u = 0 \text{ в } V_-, \tag{3}$$

$$\Delta u_+ + k_0^2 u_+ = 0 \text{ в } V+, \tag{4}$$

$$u|_\Gamma = 0, \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma'} = 0, \tag{6}$$

$$[u]_\omega = 0, \tag{7}$$

$$\left[\varepsilon\frac{\partial u}{\partial n}\right]_{\omega} = 0, \tag{8}$$

$$[u]_S = 0, \tag{9}$$

$$\left[\varepsilon\frac{\partial u}{\partial n}\right]_S = 0, \tag{10}$$

$$u_+ = O(r^{-1}),\ \ \frac{\partial u_+}{\partial r} - ik_0u_+ = o(r^{-1}),\ \ r := |x| \to \infty. \tag{11}$$

Решение u будем искать в пространстве Соболева

$$H^1_{0,\Gamma}(V_-) := \{u \in H^1(V_-)\ :\ u|_\Gamma = 0\left(\in H^{1/2}(\Gamma)\right)\},$$

которое обеспечивает выполнение условия "конечности энергии" в любом ограниченном объеме. Кроме того, "автоматически" выполняются условия (5) и (7) в смысле следов.

В области V_- запишем "слабую" (вариационную) формулировку задачи для решения $u \in H^1_{0,\Gamma}(V_-)$:

$$-\int\limits_{V_-}\varepsilon(x)\nabla u\nabla\bar{v}\,dx + \int\limits_{V_-}\varepsilon(x)k^2(x)u\bar{v}\,dx + \int\limits_S\varepsilon(x)\frac{\partial u}{\partial n}\bar{v}\,dS = 0, \tag{12}$$

$$\forall\, v \in H^1_{0,\Gamma}(V_-).$$

Вариационная формулировка (12) эквивалентна уравнению (3), краевым условиям (5), (6) и условиям сопряжения (7), (8), понимаемым в смысле распределений [6]. Условия (6) и (8) являются "естественными", условия (5) и (7) – "главными".

Пусть $G_K(x,y)$ – функция Грина для задачи Неймана для уравнения Гельмгольца (4) (удовлетворяющая условию излучения Зоммерфельда) в V_+. Тогда имеем представление в области V_+:

$$u_+(x) = -\int\limits_S G_K(x,y)\frac{\partial u_+(y)}{\partial n}\,dS_y,\quad x \in V_+, \tag{13}$$

где

$$G_K(x,y) = \Phi(x,y) + g_k(x,y),\quad \Phi(x,y)_i := \frac{e^{ik_0|x-y|}}{4\pi|x-y|}, \tag{14}$$

и g_k не имеет особенности при $|x-y| \to 0$. Обозначим

$$\varphi_0(x) := \left.\frac{\partial u_+(x)}{\partial n}\right|_S, \quad \psi_0(x) := u_+(x)|_S, \quad x \in S.$$

Тогда

$$u_+(x) = -\int\limits_S G_K(x,y)\varphi_0(y)\,dS_y, \quad x \in V_+, \tag{15}$$

и

$$\psi_0(x) = -\int\limits_S G_K(x,y)\varphi_0(y)\,dS_y, \quad x \in S. \tag{16}$$

При таком выборе $u_+(x)$ уравнение (4) и условия излучения (11) удовлетворяются "автоматически". Из условия (10) получаем, что

$$\varepsilon\left.\frac{\partial u_-}{\partial n}\right|_S = \left.\frac{\partial u_+}{\partial n}\right|_S + \left.\frac{\partial u_0}{\partial n}\right|_S = \varphi_0(x) + \left.\frac{\partial u_0}{\partial n}\right|_S. \tag{17}$$

Тогда уравнение (12) переходит в (18):

$$-\int\limits_{V_-} \varepsilon(x)\nabla u\nabla\bar{v}\,dx + \int\limits_{V_-} \varepsilon(x)k^2(x)u\bar{v}\,dx =$$

$$= -\int\limits_S \bar{v}\left(\varphi_0(x) + \left.\frac{\partial u_0}{\partial n}\right|_S\right) dS_x \tag{18}$$

Условие (9) запишем в "слабой" форме

$$\int\limits_S \left(\psi_0(x) + u_0(x)|_S - u_-(x)|_S\right)\bar{g}(x)\,dS_x = 0, \quad \forall g \in H^{-1/2}(S). \tag{19}$$

Таким образом, необходимо решить систему уравнений (16), (18), (19) относительно неизвестных функций $\psi_0(x)$, $\varphi_0(x)$, $u_-(x)$ (в V_-). Тогда, полагая по формуле (13) $u_+(x)$, получим решение исходной краевой задачи (2) – (11). Действительно, уравнение (4) и условия излучения (11) выполняются за счет выбора $u_+(x)$ в виде (13). Далее, вычисляя предел $\lim\limits_{X\to x} u_+(X)$, в силу уравнения (16) получаем, что $u_+(x)|_S = \psi_0(x)$, а тогда уравнение (19) приводит к выполнению (9). Из (18) вариацией $\bar{v} \in C_0^\infty(V_-)$

находим, что справедливо уравнение (3); затем, варьируя v в окрестности S, имеем, что

$$\varphi_0(x) + \left.\frac{\partial u_0}{\partial n}\right|_S = \left.\left(\varepsilon\,\frac{\partial u_-}{\partial n}\right)\right|_S.$$

Далее,

$$\left.\frac{\partial u_+}{\partial n}\right|_S = \frac{\partial}{\partial n_X}\left(-\int\limits_S G_K(x,y)\,\varphi_0(y)\,dS_y\right) = \varphi_0(x),$$

откуда следует, что $\varphi_0(x) = \left.\frac{\partial u_+}{\partial n}\right|_S$. Таким образом, условие (10) также выполнено.

Условие (10) в задаче (2) – (11) оказывается "естественным" (выполняется только на решениях), а условие (9) – "главным".

Итак, доказана теорема эквивалентности.

Теорема 1 *Краевая задача (2) – (11) эквивалентна системе уравнений (16), (18), (19), т.е. если существует решение краевой задачи (2) – (11), то существует и решение системы уравнений (16), (18), (19), где $\varphi_0(x)$ и $\psi_0(x)$ определяются по формулам (14); и обратно, если существует решение системы уравнений (16), (18), (19), то существует и решение краевой задачи (2) – (11), причем $u_+(x)$ и $u(x)$ определяются по формулам (15) и (2).*

Введем новые неизвестные функции (аналог "полных токов"):

$$\psi(x) = \psi_0(x) + u_0(x)|_S, \quad \varphi(x) = \varphi_0(x) + \left.\frac{\partial u_0}{\partial n}\right|_S. \tag{20}$$

Тогда уравнения (16), (18), (19) преобразуются к виду:

$$\psi(x) + \int\limits_S G_K(x,y)\,\varphi(y)\,dS_y = f(x), \quad x \in S, \tag{21}$$

где

$$f(x) := u_0(x)|_S + \int\limits_S G_K(x,y)\,\left.\frac{\partial u_0}{\partial n}\right|_S dS_y,$$

$$\int\limits_{V_-} \varepsilon(x)\nabla u\nabla\bar{v}\,dx - \int\limits_{V_-} \varepsilon(x)k^2(x)u\bar{v}\,dx - \int\limits_{S} \varphi(x)\bar{v}(x)|_S\,dS_x = 0, \qquad (22)$$

$$\forall v \in H^1_{0,\Gamma}(V_-),$$

$$\int\limits_{S} (u(x)|_S - \psi(x))\,\overline{g(x)}\,dS_x = 0, \qquad (23)$$

$$\forall g \in H^{-1/2}(S).$$

Из уравнения (21), очевидно, можно выразить функцию $\psi(x)$ и подставить в (23). В результате окончательно получаем задачу (22), (24) для неизвестных функций $u(x) = u_-(x)$ и $\varphi(x)$, где

$$\int\limits_{S} \left(u(x)|_S + \int\limits_{S} G_K(x,y)\,\varphi(y)\,dS_y - f(x) \right) \bar{g}(x)\,dS_x = 0, \qquad (24)$$

$$\forall g \in H^{-1/2}(S).$$

3. Эллиптичность операторов в задаче

Пусть $H^{-1}_{\Gamma}(V_-) := \left(H^1_{0,\Gamma}(V_-)\right)'$ – антидвойственное пространство относительно скалярного произведения

$$(u,v) := \int\limits_{V_-} u(x)\overline{v(x)}\,dx$$

. Введем также скалярное произведение на S:

$$\langle \varphi, g \rangle := \int\limits_{S} \varphi(x)\overline{g(x)}\,dS$$

.

Рассмотрим полуторалинейную ограниченную форму на $H^1_{0,\Gamma}(V_-)$ (т.е., на $H^1_{0,\Gamma}(V_-) \times H^1_{0,\Gamma}(V_-)$):

$$b(u,v) := \int\limits_{V_-} \varepsilon(x)\nabla u\nabla\bar{v}\,dx - \int\limits_{V_-} \varepsilon(x)k^2(x)u\bar{v}\,dx. \qquad (25)$$

Она определяет ограниченный оператор $B: H^1_{0,\Gamma}(V_-) \to H^{-1}_\Gamma(V_-)$ по формуле

$$b(u,v) = (Bu, v), \quad \forall\, v \in H^1_{0,\Gamma}(V_-). \tag{26}$$

Рассмотрим другую полуторалинейную форму

$$i_1(\psi, g) := \int\limits_S \psi(x)\overline{g(x)}\, dS. \tag{27}$$

Эта форма определяет единичный оператор в $H^{1/2}(S)$, если ее рассматривать на паре пространств $H^{1/2}(S) \times H^{-1/2}(S)$, по формуле

$$i_1(\psi, g) = \langle I\psi, g\rangle, \quad \forall\, g \in H^{-1/2}(S), I\ :\ H^{1/2}(S) \to H^{1/2}(S). \tag{28}$$

Далее определим оператор следа на S, $C \equiv tr$,

$$C\ :\ H^1_{0,\Gamma}(V_-) \to H^{1/2}(S), \tag{29}$$

с помощью полуторалинейной формы на $H^1_{0,\Gamma}(V_-) \times H^{-1/2}(S)$:

$$c(u,g) := \int\limits_S tr\, u\, \bar{g}\, dS, \tag{30}$$

по формуле

$$c(u,g) = \langle Cu, g\rangle, \quad \forall\, g \in H^{-1/2}(S), \tag{31}$$

и сопряженный ему оператор $D\ :\ H^{-1/2}(S) \to H^{-1}_\Gamma(V_-)$, определяемый полуторалинейной формой на $H^{-1/2}(S) \times H^1_{0,\Gamma}(V_-)$

$$d(\varphi, v) := \int\limits_S \varphi\, tr\, \bar{v}\, dS, \tag{32}$$

по формуле

$$d(\varphi, v) = (D\varphi, v), \quad \forall\, v \in H^1_{0,\Gamma}(V_-). \tag{33}$$

Ограниченность всех форм и соответствующих операторов следует из известных результатов о следах в пространствах Соболева [4] и теорем двойственности [5].

Тот факт, что операторы C и D являются сопряженными друг к другу, доказывается следующими равенствами:

$$(D\varphi, v)_{L_2(V_-)} = (D\varphi, v)_{H_\Gamma^{-1}(V_-), H_{0,\Gamma}^1(V_-)} \equiv \int_S \varphi\, tr\, \bar{v}\, dS,$$

$$\langle Cu, g\rangle_{L_2(S)} = \langle Cu, g\rangle_{H^{1/2}(S), H^{-1/2}(S)} \equiv \int_S tr\, u \cdot \bar{g}\, dS;$$

$$\begin{aligned} D &: H^{-1/2}(S) \to H_\Gamma^{-1}(V_-), \\ C &: H_{0,\Gamma}^1(V_-) \to H^{1/2}(S), \\ D^* &: H_{0,\Gamma}^1(V_-) \to H^{1/2}(S), \\ C^* &: H^{-1/2}(S) \to H_\Gamma^{-1}(V_-); \end{aligned}$$

$$\int_S \varphi\, tr\, \bar{u}\, dS = (D\varphi, u) = \overline{\langle Cu, \varphi\rangle} = \int_S \overline{tr\, u \cdot \bar{\varphi}}\, dS,$$

значит $C = D^*$, $D = C^*$, так как

$$\langle \varphi, Cu\rangle = (D\varphi, u), \quad \forall \varphi \in H^{-1/2}(S), \quad u \in H_{0,\Gamma}^1(V_-).$$

Далее, пусть

$$Z\varphi := \int_S G_K(x, y)\, \varphi(y)\, dS_y,$$

$$Z : H^{-1/2}(S) \to H^{1/2}(S) \text{ – потенциал простого слоя.}$$

Оператор Z ограничен и является сильно эллиптическим, т.е. существует оператор Q такой, что

$$\mathcal{R}e\langle (Z - Q)\varphi, \varphi\rangle \geq \lambda \|\varphi\|_{-1/2}^2, \quad \forall \varphi \in H^{-1/2}(S), \quad \lambda > 0, \tag{34}$$

причем $Q : H^{-1/2}(S) \to H^{1/2}(S)$ – компактен. Тогда оператор Z фредгольмов и $\operatorname{ind} Z = 0$.

Для доказательства (34), согласно [4], достаточно установить, что ядро $G_K(x, y)$ представимо в виде

$$G_K(x, y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{2\pi|x - y|} + g(x, y), \tag{35}$$

где $g(x, y)$ не имеет особенности при $|x - y| \to 0$ и является гладкой функцией $g \in C^\alpha(S \times S)$, $\alpha > 0$.

Лемма 1 *Пусть* $k_0 \neq 0$, *и*

$$\begin{cases} \Delta G_K + k_0^2 G_K = -\delta(x-y), & y \in V_+, \\ \left.\dfrac{\partial G_K}{\partial n_x}\right|_S = 0, & \\ \dfrac{\partial G_K}{\partial r} - ik_0 G_K = o\left(\dfrac{1}{r}\right), \quad r := |x| \to \infty. & \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \Delta G_0 = -\delta(x-y), \quad y \in V_+, & \\ \left.\dfrac{\partial G_0}{\partial n_x}\right|_S = 0, & G_0 = O\left(\dfrac{1}{r}\right), \quad r := |x| \to \infty \end{cases}$$

– функции Грина задач Неймана во внешности сферы радиуса R *для уравнения Гельмгольца и Лапласа соответственно. Тогда*

$$g_k := G_K - G_0 \in C^\alpha(\overline{V}_+ \times \overline{V}_+); \quad \alpha > 0.$$

Функция G_0 имеет вид:

$$G_0(x,y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} + \frac{R}{4\pi|y|\,|x-y^*|} =$$

$$\frac{1}{4\pi|x-y|} + \frac{R|y|}{4\pi\left|x|y|^2 - yR^2\right|}, \quad x, y \in V_+.$$

Тогда, если $|y| = R$, $|x| = R$, то

$$G_0(x,y) = \frac{1}{2\pi|x-y|},$$

что доказывает представление (35).

Рассмотрим оператор A_0, определяемый как

$$A_0 = \begin{pmatrix} B & -D \\ C & Z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} H^1_{0,\Gamma}(V_-) \\ H^{-1/2}(S) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} H^{-1}_\Gamma(V_-) \\ H^{1/2}(S) \end{pmatrix},$$

где $Z := Z_1 + Q \ : \ H^{-1/2}(S) \to H^{1/2}(S)$, и его квадратичную форму

$$(A_0 z, z) = (Bu, u) + 2i\mathcal{I}m\langle Cu, \varphi\rangle + \langle Z\varphi, \varphi\rangle, \tag{36}$$

$$z = \begin{pmatrix} u \\ \varphi \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} H^1_{0,\Gamma}(V_-) \\ H^{-1/2}(S) \end{pmatrix}.$$

Так как Q – компактный, то

$$\mathcal{R}e(A_0 z, z) = \mathcal{R}e(Bu, u) + \mathcal{R}e(Z\varphi, \varphi) \tag{37}$$

и существует компактный оператор B_0 такой, что

$$\mathcal{R}e((A_0 + B_0)z, z) \geq \lambda_0 \left(||u||^2_{H^1_{0,\Gamma}(V_-)} + ||\varphi||^2_{H^{-1/2}(S)} \right), \quad \lambda_0 > 0, \tag{38}$$

следовательно, A_0 – сильно эллиптический. Оператор A_0 обратим, так как существует и единственно решение краевой задачи (2) – (11) и имеет место теорема эквивалентности [6].

Задача (22), (24) эквивалентна операторному уравнению

$$A_0 z = F, \quad \text{где } F = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \in H', \quad z \in H, \tag{39}$$

$$H = \begin{pmatrix} H^1_{0,\Gamma}(V_-) \\ H^{-1/2}(S) \end{pmatrix}, \quad H' = \begin{pmatrix} H^{-1}_{\Gamma}(V_-) \\ H^{1/2}(S) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы получаем следующий результат:

Теорема 2 *Уравнение (39) однозначно разрешимо. Оператор $A_0 : H \to H'$ является сильно эллиптическим, т.е. справедливо (38) с некоторым компактным оператором*

$$B_0 = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} : H \to H'.$$

Литература

[1] Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. – М.: ИПРЖР, 1996.

[2] R.Kress. Linear Integral Equations. – Applied Mathematical Sciences. Vol.82. - Springer-Verlag, 1989.

[3] T.Cwik. The Coupling Finite Element and Integral Equation Solutions Using Decoupled Boundary Meshes // IEEE Trans. on Antennas and Propagat. – 1992. – Vol.40, №.12. – P.1496–1504.

[4] M.Costabel. Boundary Integral Operators on Lipschitz Domains: Elementary Results // SIAM J. Math. Anal. – 1988. – Vol.19, №.3. – P.613–626.

[5] H.Triebel. Interpolation Theory. Function spaces. Differential Operators. – Berlin: VEB Deutscher Verlag, 1978.

[4] [6] E.Sanchez-Palencia. Non-Homogeneous Media and Vibration Theory. – New York: Springer-Verlag, 1980.

Трифонов Е.В. (Казань)

Вычисление комплексных постоянных распространения диэлектрических волноводов

Предложен проекционный метод вычисления комплексных постоянных распространения диэлектрических волноводов с произвольным контуром поперечного сечения. Возможности метода проиллюстрированы на примере волноводов кругового и квадратного сечений. Исследована внутренняя сходимость метода.

Рассмотрим цилиндрический диэлектрический волновод с постоянной диэлектрической проницаемостью ε_1, находящемся в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$. В каждой среде магнитная проницаемость $\mu = 1$. Пусть поперечное сечение волновода S_1 – область, ограниченная дважды непрерывно дифференцируемым контуром C.

Будем искать собственные волны волновода, то есть нетривиальные решения системы уравнений Максвелла

$$rot\ H = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}, \qquad rot\ E = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}$$

вида

$$E(x, y, z, t) = Re(\overline{E}(x, y)\exp(i(\omega t - \beta z))),$$

$$H(x, y, z, t) = Re(\overline{H}(x, y)\exp(i(\omega t - \beta z))).$$

Здесь $\omega > 0$ – заданная частота электромагнитных колебаний, постоянная распространения β – неизвестный комплексный параметр, $\overline{E}, \overline{H}$ – комплексные амплитуды собственных волн.